

## Apsolutna vrijednost

Apsolutna vrijednost, ili modul realnog broja definira se ovako:

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Svojstva apsolutne vrijednosti su sljedeća:

1.  $|x| \geq 0$
2.  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
4.  $|-x| = |x|$
5.  $|x|^2 = x^2$
6.  $\sqrt{x^2} = |x|$
7.  $|x + y| \leq |x| + |y|$
8.  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a), a \in \mathbb{R}^+$
8.  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
9.  $|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ili } x < -a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$
9.  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ili } x \leq -a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

### Zadaci:

1. Izračunati:

- a)  $\left| \sqrt{6} - 2,45 \right|$   $\left[ Rj.: 2,45 - \sqrt{6} \left( \sqrt{6} \approx 2,449 < 2,45 \right) \right];$
- b)  $\left| \pi - \sqrt{10} \right|$   $\left[ Rj.: \sqrt{10} - \pi \left( \sqrt{10} \approx 3,16 > \pi \right) \right];$
- c)  $\left| \frac{22}{7} - \pi \right|$   $\left[ Rj.: \frac{22}{7} - \pi \left( \frac{22}{7} \approx 3,142857 > \pi \right) \right].$

2. Izračunati:

- a)  $A = \frac{|3 - \sqrt{12}| - |4 - \sqrt{27}|}{|1 - \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{3}|}$   $\left[ Rj.: \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right];$
- b)  $B = \frac{|3 - \sqrt{8}| - |2 - \sqrt{18}|}{|4 - 3\sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2|}$   $\left[ Rj.: -\frac{5}{3} \right];$

$$c) C = \frac{|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}| - |2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}|}{|\sqrt{2} - 1| - |1 - \sqrt{3}|} \quad [Rj.: 5].$$

3. Izračunati  $|\sqrt{3} - |-3||$ .

4. Izračunati  $A = \frac{x|y| - y|x|}{|x| - |y|}$  za:

a)  $x = -2, y = -3$  [Rj.: 0];

b)  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}$  [Rj.: 4];

c)  $x = 1 - \sqrt{2}, y = 1 + \sqrt{2}$  [Rj.: 1].

5. Pojednostaviti:

a)  $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = ?$  [Rj.:  $\Rightarrow 0$ ];

b)  $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = ?$  [Rj.:  $\Rightarrow 1$ ];

c)  $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})^2} = ?$  [Rj.:  $\Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ].

6. Skratiti (pojednostaviti) razlomke:

$$\begin{array}{l} a) \frac{x^2 - |x-1| - 1}{x^2 - 1} \\ b) \frac{(|x|-1)(x-1)}{x^2 - 2|x| + 1} \\ c) \frac{x|x-1| - x + 1}{x^2 - 2|x| + 1} \\ d) \frac{x(x-2) + |x-2|}{|x-1|(x-2)} \end{array} \quad \left[ \begin{array}{l} Rj.: \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+2}{x+1} \quad za \quad x < 1 \\ \frac{x}{x+1} \quad za \quad x > 1 \end{array} \right\}; \\ Rj.: \left\{ \begin{array}{l} -\frac{x-1}{x+1} \quad \frac{za \quad x < 0, \quad x \neq -1}{1} \\ 1 \quad \frac{za \quad x > 0, \quad x \neq 1}{1} \end{array} \right\}; \\ Rj.: \left\{ \begin{array}{l} -\frac{x-1}{x+1} \quad \frac{za \quad x \leq 0, \quad x \neq -1}{x+1} \\ \frac{x+1}{x-1} \quad \frac{za \quad 0 \leq x \leq 1}{1} \\ 1 \quad \frac{za \quad x > 1}{x-1} \end{array} \right\}; \\ Rj.: \left\{ \begin{array}{l} -1 \quad \frac{za \quad x < 1}{1} \\ 1 \quad \frac{za \quad 1 < x < 2}{x+1} \\ \frac{x+1}{x-1} \quad \frac{za \quad x > 2}{x-1} \end{array} \right\}; \end{array} \right.$$

$$\text{e) } \frac{|2x-3|+|3x-2|}{x^2-3x+2} \quad \text{Rj.: } \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{5}{x-2} & \text{za } x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} & \text{za } \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{2}, x \neq 1 \\ \frac{5}{x-2} & \text{za } x \geq \frac{3}{2}, x \neq 2 \end{array} \right. \\ \end{array} \right];$$
$$\text{f) } \frac{|x+1|-|2x-1|}{x|x-2|} \quad \text{Rj.: } \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{x} & \text{za } x \leq -1, x > 2 \\ -\frac{3}{x-2} & \text{za } -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \neq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{za } \frac{1}{2} \leq x < 2 \end{array} \right. \\ \end{array} \right].$$

7.

a) Dana je funkcija  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ .

Koliko je  $f(x)$  za  $-3 < x < 3$ ? Izračunati  $f(-\sqrt{8})$ ;

$$\left[ \text{Rj.: } f(x) = -2x \quad \text{za } x \in (-3, 3), \quad f(-\sqrt{8}) = 4\sqrt{2} \right];$$

b) Dana je funkcija  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2}$

Koliko je  $f(x)$  za  $x < -3$ ? Izračunati  $f(-\sqrt{112})$ ,  $f(-\pi)$ ;

$$\left[ \text{Rj.: } f(x) = 4 \quad \text{za } x \in (-\infty, -3), \quad f(-\sqrt{112}) = 4, \quad f(-\pi) = 4 \right].$$

8. Funkciju  $f(x) = -|x+1|+1$  napisati bez znaka apsolutne vrijednosti.9. Funkciju  $f(x) = 3|x-1|-x$  napisati bez znaka apsolutne vrijednosti.10. Funkciju  $f(x) = |3-x|+x-3$  napisati bez znaka apsolutne vrijednosti.11. Riješiti jednadžbu  $x - |x-3| = 3$ .12. Riješiti jednadžbu  $x^2 = |4x-3|$ .13. Riješiti jednadžbu  $||x-3|=1$ .14. Riješiti jednadžbu  $x^2 + |x-1| = 1$ .

15. Riješiti jednadžbe:

a)  $|1-4x|=2$

$$[Rj.: x = -\frac{1}{4} \text{ ili } x = \frac{3}{4}];$$

b)  $|8x+3| = \frac{5}{12}$

$$[Rj.: x = -\frac{41}{96} \text{ ili } x = -\frac{31}{96}];$$

c)  $|3x-2|=x+1$

$$[Rj.: x = -\frac{1}{4} \text{ ili } x = \frac{3}{2}];$$

d)  $||x-1|+1|=3$

$$[Rj.: x = 3 \text{ ili } x = -1];$$

e)  $|2-x|=|3x-1|$

$$[Rj.: x = -\frac{1}{2} \text{ ili } x = \frac{3}{4}];$$

f)  $\left|\frac{x+1}{2x-3}\right|=1$

$$[Rj.: x = \frac{2}{3} \text{ ili } x = 4];$$

g)  $\left|\frac{x+2}{3x-1}\right| = \left|\frac{x+2}{3x+1}\right|$

$$[Rj.: x = -2 \text{ ili } x = 0];$$

h)  $|x-5|-|2x-3|=2$

$$[Rj.: x_1 = 0, x_2 = 2];$$

i)  $|x-1|-|1-2x|=5$

$$[Rj.: x \in \emptyset];$$

j)  $|1-2x|+|2-3x|+|3-4x|=9$

$$[Rj.: x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{5}{3}].$$

16. Riješiti u skupu  $\mathbf{R}$  nejednadžbu  $|2x-1| < 3$ .17. Riješiti jednadžbu  $|x^2+4x|=x^2+4x+6$ .18. Riješiti jednadžbu  $\left|-\frac{1-x}{2x+3}\right|-3=0$ .19. Riješiti nejednadžbu  $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 1$ .20. Naći zbroj rješenja jednadžbe  $|3x-2|=1-x$ .21. Riješiti jednadžbu  $|x-1|+|x-2|=1$ .

22. Riješiti nejednadžbe:

a)  $|2x+1| \leq \frac{1}{3}$

$$[Rj.: -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}];$$

b)  $|x+5| > \frac{3}{4}$

$$[Rj.: x < -\frac{23}{4}, x > -\frac{17}{4}];$$

c)  $||x|-5| < 3$

$$[Rj.: -8 < x < -2, 2 < x < 8].$$

23. Riješiti nejednadžbe:

a)  $|x| - |x+3| - |x+5| \leq 2$

$[Rj.: x \leq 6, x \geq -4];$

b)  $|2x-3| + |2-3x| < |x+1|$

$[Rj.: \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}];$

c)  $\left| \frac{x-1}{2x+1} \right| > 1$

$[Rj.: x \in (-2, 0), x \neq -\frac{1}{2}];$

d)  $\left| \frac{x+1}{2x-3} \right| \geq \frac{1}{2}$

$[Rj.: x \geq \frac{1}{4}, x \neq \frac{3}{2}].$

24. Koliko je  $\sqrt{(-a)^2}$ , ( $a \in \mathbf{R}$ )?

25. Zadani su skupovi:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid -5 \leq x - 3 \leq 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < |x+1| + 1 \leq 5\}$$

Naći  $A \cup B$ .

26. Neka je  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| - 1 < 0\}$  i  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| \leq 1\}$ . Naći  $A \cap B$ .

27. Koliko ima rješenja jednadžbe  $2x + |x-5| = 7$ ?

28. Naći zbroj rješenja jednadžbe  $\frac{1}{|2x-3|} + 8 = \frac{5}{|3-2x|}$ .

29. Naći skup rješenja nejednadžbe  $|x^2 - 5x| \leq 6$ .

30. Naći područje definicije funkcije  $f(x) = \sqrt{|x-3| - |8-x|}$ .

31. Riješiti jednadžbu:

a)  $\frac{|2-x| - |2x-3| + 4x-1}{|x+4|} = 1, \quad x \in \mathbf{R};$

b)  $|x^2 - 7x + 10| - |x-3| = 6.$

32. Funkciju  $y = 2 \cdot |x-1| + |x+1|$  napisati bez znaka apsolutne vrijednosti i skicirati njen graf.

33. Skicirati graf funkcija:

a)  $f(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{1+|x|};$

b)  $f(x) = \frac{1}{|x^2-1|}.$

34. Prikazati grafički:

- a)  $y = -|x|$ ;
- b)  $y = |x| - 1$ ;
- c)  $y = -|x| + 2$ ;
- d)  $y = |x - 2|$ ;
- e)  $y = |-x - 4|$ ;
- f)  $y = |x - 1| - 2$ ;
- g)  $y = -|x - 2| + 2$ ;
- h)  $y = 2|x + 2| - 2$ ;
- i)  $y = ||x| - 1|$ ;
- j)  $y = |2 - |x||$ ;
- k)  $y = ||x - 1| - 2| - 3$ ;
- l)  $y = |x + 3| - |2x + 3|$ ;
- m)  $y = |x - 1| - |x + 1|$ ;
- n)  $y = |x - 1| + |x + 1|$ .

35. Riješiti računski i grafički nejednadžbe:

- a)  $|x - y + 2| > 1$ ;
- b)  $|2x - 3y + 1| < 4$ ;
- c)  $|x| + |y| < 1$ .

36. Riješiti računski i grafički:

- a)  $x^2 = |2x + 3|$ ;
- b)  $|x + 2| - |x^2 - 4| > 0$ .

37. Riješiti grafički:

- a)  $2x - 1 = |x + 3|$ ;
- b)  $|3x + 2| = -x$ ;
- c)  $|3 - x| = x - 3$ .

38. Riješiti nejednadžbe:

- a)  $\left| \frac{x + 4}{3x + 2} \right| > \frac{1}{x}$ ;
- b)  $\left| \frac{2 \cdot (x - 3)}{x - 2} \right| > x^2 - 4x + 3$ .



39. Riješiti:

a)  $|3^{x+2} - 1| = 3^{x+2} - 1;$

b)  $|2^{x+1} - 1| > 2^{x+1}.$

40. Odrediti **a** tako da rješenje  $x$  jednadžbe  $\frac{x-1}{ax+1} = \frac{x}{ax-1}$  zadovoljava uvjet  $|x| \leq 1$ .

$$\left[ Rj.: x = \frac{1}{a+2}, a \neq -2 \right].$$

41. Naći površinu lika omeđenog:

a) Grafom funkcije  $y = 4 - 2|x|$  i pravcima  $y - 1 = 0$ ,  $y + 2 = 0$ ;

b) Grafom funkcije  $y = |x - 1| + |x + 1|$  i pravcem  $y - 4 = 0$ .

42. Za koje realne  $x$  vrijedi::

a)  $\sqrt{(2x-1)^2} = 2x-1$

$$\left[ Rj.: \forall x \geq \frac{1}{2} \right];$$

b)  $\sqrt{(x+2)^2} = -x-2$

$$\left[ Rj.: \forall x \leq -2 \right].$$