Matematička indukcija

1. Dokazati matematičkom indukcijom da za sve **n** $\in$ N vrijedi:
   a) $-3+3+9+\cdots+(6n-9)=3n^2-6n$
   b) $-1+3+7+\cdots+(4n-5)=n(2n-3)$
   c) $-3-7-11-\cdots-(4n-1)=-n(2n+1)$
   d) $5+8+11+\cdots+(3n+2)=\frac{1}{2}n(3n+7)$
   e) $2+7+15+\cdots+\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2$
   f) $-1+3-5+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$
   g) $3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=3(2^n-1)$
   h) $2+16+56+\cdots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$

2. Dokazati matematičkom indukcijom da za sve **n** $\in$ N vrijedi:
   a) $1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}\cdots+n\cdot 2+(n+1)=2^{n+2}-(n+3)$
   b) $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$
   c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$

3. Uvesti nekoliko početnih vrijednosti za broj **n** i odrediti izraz za sljedeće zbrojeve. Dobivenu formulu provjeriti matemat. indukcijom!
   a) $1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}=?$
   b) $1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}=?$
   c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=?$

4. Dokazati matematičkom indukcijom:
   a) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$
   b) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
   c) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$
   d) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$
   e) $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$
   f) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

5. Provjeri matematičkom indukcijom slijedeće formule za zbrojeve potencija: $\boxed{S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k + \cdots, \quad k \in \mathbb{N}}$.
   a) $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   b) $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   c) $S_3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

6. Koristeći formule iz prethodnog zadatka izračunati sljedeće sume:
   a) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1)$
   b) $1\cdot 3 + 3\cdot 5 + 5\cdot 7 + \cdots + (2n-1)\cdot(2n+1)$
   c) $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \cdots + n\cdot(3n+1)$
   d) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$
   e) $2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + \cdots + (n+1)\cdot n^2$
   f) $2\cdot 2 + 2\cdot 5 + 2\cdot 8 + \cdots + 2\cdot(3n-1)$

7. Dokazati indukcijom:
   a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\dfrac{nx}{2}$
   b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \sin\dfrac{nx}{2}$
   c) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots \sin(2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$
   d) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$
   e) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cdots \cdot \cos 2^n x = \dfrac{\sin 2^{n+1}x}{2^n \sin x}$

8. Dokazati matematičkom indukcijom:
   a) $6 \mid n^3 + 11n$
   b) $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + 7n$
   c) $7 \mid n^7 + 3n - -1$
   d) $9 \mid 7^n + 3n - 1$
   e) $11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$

9. Dokazati da je broj $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \cdots + 7^{4n}$ djeljiv sa 100 za svaki $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

10. Matematičkom indukcijom dokazati: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

Rješenje:

T: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tvrdnju dokazujemo primjenom načela matematičke indukcije.

Za $\boxed{n = 1}$ imamo: $(2)! < 2^2(1)^2 \Leftrightarrow 2 < 4$, što je istina, dakle, tvrdnja vrijedi za n = 1.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neko $\boxed{n \in \mathbb{N}}$, tj. da vrijedi: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

Pogledajmo što vrijedi za broj $\boxed{n+1 \in \mathbb{N}}$:

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \overset{po\ pretpostavci}{<} 2^{2n}(n!)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) <$$

$$< 2^{2n}(n!)^2 \cdot (2n+2)^2 = 2^{2n}(n!)^2 \cdot 2^2 \cdot (n+1)^2 = 2^{2n+2} \cdot (n! \cdot (n+1))^2 = 2^{2(n+1)} \cdot ((n+1)!)^2$$

Što je i trebalo dokazati. Dakle, po načelu matematičke indukcije gornja nejednadžba je dokazana $\forall n \in \mathbb{N}$.