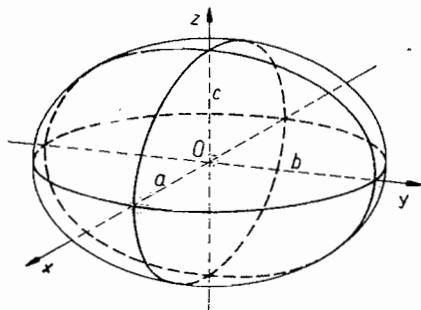


## 10. PLOHE DRUGOG REDA (NORMALNE JEDNADŽBE)\*

**Centralne plohe.** Jednadžbe navedene niže dane su u *normalnom* obliku: *središte* plohe (tačka u kojoj se raspolavljaju sve tetive što krozan prolaze) je u ishodištu, a za koordinatne osi uzete su osi simetrije plohe. Pri tome su koordinatne ravnine ravnine simetrije.

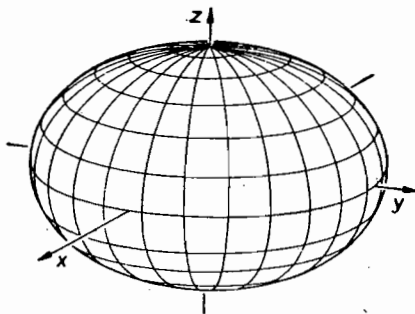
*Elipsoid* (sl. 212):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , su polovi.



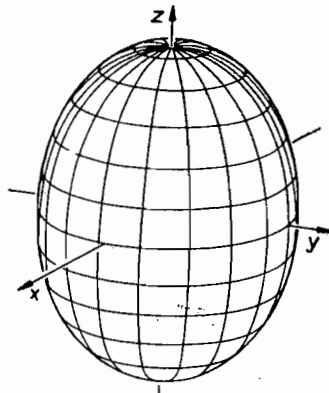
Sl. 212

Ako je  $a = b > c$ , imamo *spljošteni rotacioni elipsoid* (sl. 213) koji nastaje rotacijom elipse oko male osi elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  u ravni  $Oxz$ .

Ako je  $a = b < c$  imamo *produljeni rotacioni elipsoid* (sl. 214) koji nastaje rotacijom elipse oko velike osi elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  u ravni  $Oxz$ .



Sl. 213



Sl. 214

\* Opću jednadžbu plohe drugog reda vidi na str. 264.

Ako je  $a = b = c$  imamo *kuglu*:

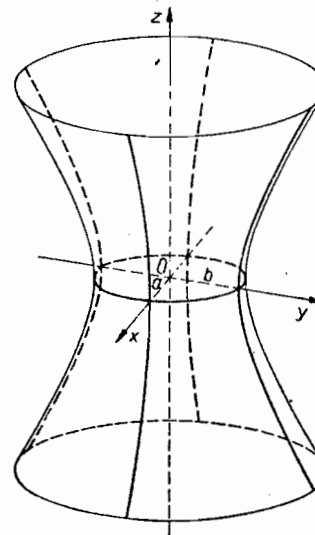
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Svaka ravnina siječe elipsoid u elipsi (u posebnom slučaju u kružnici). Volumen elipsoida je  $\frac{4}{3}\pi abc$ .

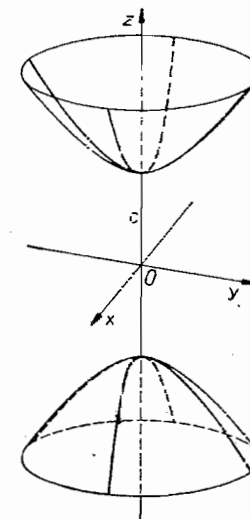
*Jednokrilni (jednoplšni) hiperboloid* (sl. 215):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a$  i  $b$  su realne poluosi,  $c$  je imaginarna poluos.

O pravčastim izvodnicima vidi na str. 263.

*Dvokrilni (dvooplšni) hiperboloid* (sl. 216):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ,  $c$  je realna poluos,  $a$  i  $b$  su imaginarne poluosi.



Sl. 215



Sl. 216

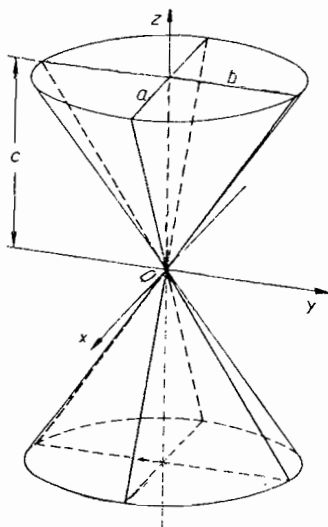
Za oba hiperboloida presjeci paralelni sa osi  $Oz$  su hiperbole (za jednokrlni hiperboloid može biti par pravaca koji se sijeku), a presjeci paralelni sa osi  $xOy$  su elipse.

Ako je  $a = b$ , onda hiperboloid može nastati rotacijom hiperbole s poluosima  $a$  i  $c$  oko osi  $2c$ , koja je za jednokrlni hiperboloid imaginarna, a za dvokrlni hiperboloid realna.

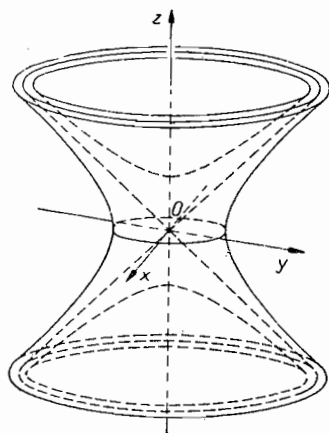
Čunj (sl. 217)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  ima vrh u ishodištu, a ravnalica

(vidi str. 201) mu može biti elipsa s poluosima  $a$  i  $b$ , kojoj je ravnina okomita na os  $Oz$  i udaljena za  $c$  od ishodišta. Taj čunj je asimptotički za dva hiperboloida  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ , tj. svaka njegova

izvodnica se pri udaljavanju u beskonačnost neograničeno približava objema hiperboloidima (sl. 218). Ako je  $a = b$  imamo uspravni kružni čunj (vidi na str. 201).



Sl. 217



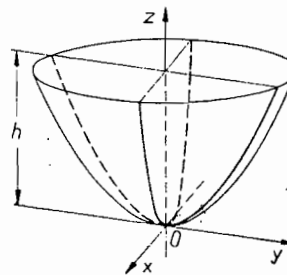
Sl. 218

**Paraboloidi.** Paraboloidi nemaju središta; za niže navedene jednačbe tjeme paraboloida je u ishodištu koordinata, os  $Oz$  je os simetrije, a ravnine  $xOz$  i  $yOz$  su ravnine simetrije.

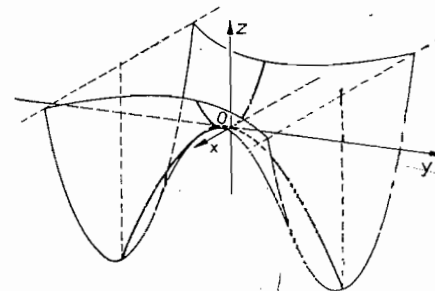
*Eliptični paraboloid* (sl. 219):  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ . Presjeci paralelni sa osi  $Oz$  su parabole; presjeci paralelni s ravninom  $xOy$  su elipse. Ako je  $a = b$  imamo *rotacioni paraboloid*, koji nastaje rotacijom parabole  $z = \frac{x^2}{a^2}$ , u ravnini  $xOz$ , oko njene osi.

Volumen dijela paraboloida koji odsijeca ravnina okomita na njegove osi u visini  $h$  je  $\frac{1}{2}\pi abh$ , a to je polovina volumena eliptičnog valjka s istom bazom i visinom.

*Hiperbolni paraboloid* (sl. 220):  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ . Presjeci paralelni s ravninom  $yOz$  su sukladne parabole; presjeci paralelni s ravninom  $xOz$  su sukladne parabole; presjeci paralelni s ravninom  $xOy$  su hiperbole (a također i par pravaca koji se sijeku).



Sl. 219



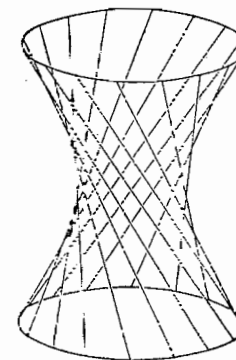
Sl. 220

**Pravčastom izvodnicom** plohe nazivamo pravac koji čitav leži u zadanoj plohi, npr. pravčasta izvodnica čunjaste ili valjkaste plohe.

*Jednokrilni hiperboloid* (sl. 221)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  ima dvije porodice pravčastih izvodnica:

$$I \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}; \end{cases}$$

$$II \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}; \end{cases}$$



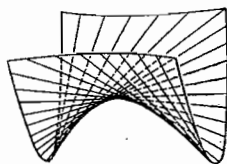
Sl. 221

$u$  i  $v$  su po volji odaberivi.

Hiperbolni paraboloid (sl. 222)  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  ima također dvije porodice izvodnica:

I)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z;$

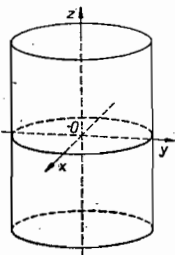
II)  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v, \quad v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z;$



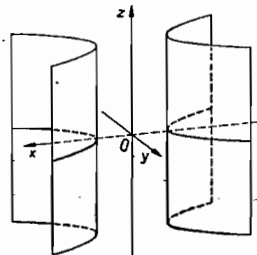
Sl. 222

$u$  i  $v$  su po volji. Kroz svaku tačku plohe u oba slučaja prolaze dva pravca; po jedna izvodnica svake porodice (na sl. 221 i 222 nacrtana je samo jedna porodica).

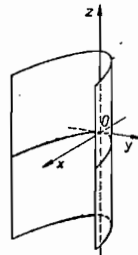
Valjci (cilindri): eliptični  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (sl. 223), hiperbolni  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (sl. 224), parabolni  $y^2 = 2px$  (sl. 225).



Sl. 223



Sl. 224



Sl. 225

11. PLOHE DRUGOG REDA (OPĆA TEORIJA)

Opća jednadžba plohe drugog reda:  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$

Invarijante plohe drugog reda\*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$S = a_{11} + a_{22} + a_{33};$

$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2.$

Te veličine se ne mijenjaju pri pomaku ishodišta i vrtnji koordinatnih osi.

\* Ovdje je:  $a_{ik} = a_{ki}.$

Oblik plohe drugog reda po njenoj jednadžbi određen je predznacima njenih invarijanata  $\Delta, \delta, S$  i  $T$  iz donje tablice. U toj tablici je redom pored naziva plohe i njena normalna jednadžba u koju transformacijom koordinate možemo dovesti zadanu jednadžbu. Jednadžbe tzv. imaginarnih ploha ne zadovoljavaju koordinate ni jedne realne tačke (osim dva izuzetka: vrh imaginarnog čunja i presječna imaginarnih ravnina).

Određivanje oblika površine drugog reda

I.  $\delta \neq 0$  (centralne plohe)

	$S\delta > 0, \quad T > 0$	$S\delta$ i $T$ nisu oba $> 0$
$\Delta < 0$	Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Dvokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Imaginarni elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Imaginarni čunj (s realnim vrhom) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Čunj $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

II.  $\delta = 0$  (paraboloidi, valjci i parovi ravnina)

	$\Delta < 0$ (pri tome je $T > 0$ )	$\Delta > 0$ (pri tome je $T < 0$ )
$\Delta \neq 0$	Eliptični paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	Hiperbolni paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Valjkasta ploha ima za ravnalicu krivulju drugog reda. U ovisnosti o obliku krivulje (vidi na str. 244 i 245) imamo valjke raznih oblika (eliptični realni ili imaginarni za $T > 0$ , hiperbolni za $T < 0$ , parabolni za $T = 0$ ), ako se plohe raspadaju na dvije ravnine (realne, imaginarne ili identične). Uvjeti za raspad:	
	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$	