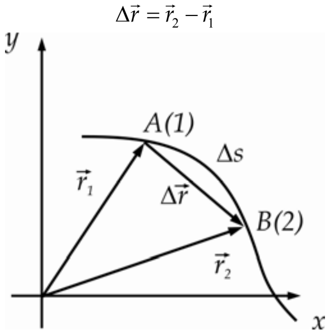
KINEMATIKA TRANSLATORNOG GIBANJA

Položaj materijalne točke (čestice) u prostoru opisanom pravokutnim Kartezijevim koordinatama je određen radijus vektorom položaja

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Pomak materijalne točke je

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Srednja brzina gibanja materijalne točke je

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Trenutna je brzina

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{v}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A izražena u komponentama

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Iznos brzine je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Pomak u vremenu *t* jednak je

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t \vec{v}dt$$

gdje je $\vec{r}_0$ radijus-vektor čestice u početnom trenutku, $\vec{r}$ radijus-vektor čestice u trenutku *t*.

Ako je brzina stalna $(\vec{v} = \text{konst.})$, pomak je

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t = \Delta\vec{r}$$

Srednja akceleracija je

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Trenutna akceleracija je

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Prirast brzine u vremenu *t* je

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{a}dt$$

Ako je ubrzanje stalno $(\vec{a} = \text{konst.})$ prirast brzine je

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t$$

Koristeći ovaj izraz za brzinu dobivamo za pomak

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt = \vec{v}_0 t + \vec{a}\frac{t^2}{2}$$

Ovi izrazi na konkretnim primjerima izgledaju ovako:

Za slobodni pad ($\vec{v}_0 = 0; \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$) imamo

$$v = gt$$

$$h = g\frac{t^2}{2}$$

Gibanje kod kojeg je materijalna točka izbačena početnom brzinom $\vec{v}_0$ pod kutom elevacije α prema horizontali predstavlja kosi hitac, također složeno gibanje. Jednadžbe komponenti tog gibanja su:

$$x = v_{0x}t = v_0 t\cos\alpha$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Eliminacijom vremena dobiva se jednadžba h koja je oblika parabole

$$y = x\text{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

Horizontalni hitac i vertikalni hitac posebni su slučajevi kosog hica.

Horizontalni hitac (tijelo izbačeno s neke visine h u horizontalnom pravcu početnom brzinom $\vec{v}_0$) je složeno gibanje. Jednadžbe komponenti tog gibanja su:

$$x = v_0 t$$

$$y = y_0 - g\frac{t^2}{2}$$

Eliminacijom vremena dobiva se jednadžba putanje horizontalnog hica

$$y = y_0 - g\frac{x^2}{2v_0^2}$$

Za vertikalni hitac (tijelo izbačeno vertikalno uvis brzinom $\vec{v}_0$) imamo:

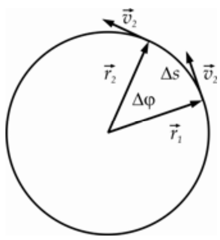
$$v = v_0 - gt$$

$$h = v_0 t - g\frac{t^2}{2}$$

KINEMATIKA KRUŽNOG (ROTACIONOG) GIBANJA

Veza između prevaljenog puta (dijela kružnog luka) Δs i opisanog kuta (kutnog pomaka) $\Delta\varphi$ je

$$\Delta s = r\Delta\varphi$$



Srednja kutna brzina materijalne točke koja se giba po kružnici je

$$\bar{\vec{\omega}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}$$

Trenutna kutna brzina materijalne točke koja se giba po kružnici je

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Srednja kutna akceleracija je

$$\vec{\alpha} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Trenutna kutna akceleracija je

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

Veza između linearne (obodne) i kutne brzine je

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Iznos ove brzine je

$$v = \omega r$$

Smjer vektora $\vec{\omega}$ određuje se pravilom desne ruke ili pravilom desnog vijka.
Radijalna (centripetalna) je akceleracija

$$\vec{a}_r = -r\omega^2\vec{r}_0 = -\frac{v^2}{r}\vec{r}_0 = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Iznos radijalne akceleracije je

$$a_r = \omega^2 r$$

Tangencijalna akceleracija je

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Iznos radijalne akceleracije je

$$a_t = \alpha r$$

Ukupna akceleracija jest vektorski zbroj tangencijalne i radijalne akceleracije

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

$$\vec{a} = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}$$

Za jednoliko gibanje po kružnici $(\vec{\alpha} = 0)$ možemo pisati

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Za kruženje s konstantnom kutnom akceleracijom ($\vec{\alpha}$ = konst.) vrijede izrazi:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}\mathrm{t}$$

$$\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\alpha}t^2}{2}$$

DINAMIKA

Količina gibanja tijela mase m i brzine $\vec{v}$ je:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

(II Newtonov zakon): Brzina promjene količine gibanja proporcionalna je sili:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Ako je masa konstantna:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

(III Newtonov zakon):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Težina tijela je sila kojom tijelo djeluje na horizontalnu podlogu ili na objesište

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

Granična sila statičkog trenja je

$$F_{tr,s} = \mu_s F_N$$

gdje je μ_s statički faktor trenja, a F_N normalna komponenta sile kojom tijelo djeluje na podlogu.

Sila trenja klizanja je

$$F_{tr} = \mu_k F_N$$

gdje je μ_k - faktor trenja klizanja.

Impuls sile jednak je promjeni količine gibanja tijela na koje ta sila djeluje

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

gdje je $\vec{p}_1$ količina gibanja tijela u trenutku t_1, a $\vec{p}_2$ u trenutku t_2.
Ako je sila stalna možemo pisati

$$\vec{I} = \vec{F}t$$

U zatvorenom (izoliranom) sustavu ukupna količina gibanja se ne mijenja (zakon održanja količine gibanja)

$$\vec{p}_u = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \text{konst.}$$

Za sustav od dva tijela taj zakon glasi

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{'} + m_2\vec{v}_2^{'}$$

Radijus-vektor centra mase sistema čestica definiran je izrazom

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

RAD I ENERGIJA

Ako stalna sila $\vec{F}$ djeluje na putu $\vec{s}$, rad je jednak

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\varphi$$

gdje je φ kut između smjera sile i smjera puta.
Ako je sila promjenljiva i put nepravocrtan, rad se računa integralom

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int F\cos\varphi ds$$

Ako se rad W obavi u vremenu t, srednja je snaga

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

Trenutna je snaga

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv\cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

gdje je $F\cos\varphi$ projekcija sile na smjer gibanja, a v brzina tijela.
Ako je sila stalna možemo pisati trenutnu snagu kao

$$P = \frac{W}{t}$$

Kinetička energija tijela mase m i brzine v je

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Gravitacijska potencijalna energija tijela mase m na visini h iznad Zemljine površine ($h \ll R_z$) je

$$E_p = mgh$$

gdje je g akceleracija sile teže. Potencijalna energija opruge je

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

gdje je k konstanta opruge, a x pomak iz položaja ravnoteže (elongacija).

Rad konzervativne sile pri pomicanju tijela od položaja 1 do položaja 2 jednak je negativnoj razlici potencijalnih energija

$$W_{12} = -\Delta E_p = E_p(r_1) - E_p(r_2)$$

U zatvorenom (izoliranom) sistemu ukupna mehanička energija je očuvana

$$E = E_k + E_p = \text{konst.}$$

To je zakon o očuvanju mehaničke energije.
Ako sistem nije zatvoren, promjena ukupne mehaničke energije jednaka je radu vanjskih sila koje djeluju na sistem

$$E_2 - E_1 = \Delta E_p + \Delta E_k = W$$

ROTACIJA KRUTOG TIJELA

Centripetalna (radijalna) sila koja djeluje na tijelo, koje se giba po putanji kružnice je

$$\vec{F}_{cp} = -\frac{mv^2}{r}\vec{r}_0 = -m\omega^2\vec{r}$$

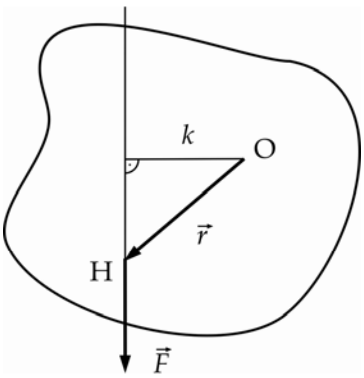
Iznos centripetalne sile je

$$F_{cp} = m\omega^2 r = \frac{4\pi mr}{T^2} = 4\pi^2 f^2 mr$$

Moment site $\vec{F}$ definira se izrazom

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja hvatišta sile s obzirom na os rotacije.



Moment tromosti (inercije) tijela s obzirom na os rotacije je

$$I = \int r^2 dm$$

gdje je *r* udaljenost elementa mase d*m* od osi rotacije.
Momenti tromosti nekih jednostavnih tijela:

1. materijalna točka mase *m* na udaljenosti *r* od osi rotacije

$$I = mr^2$$

2. tanak prsten mase *m* i polumjera *r* s obzirom na os koja prolazi kroz središte prstena okomito na ravninu prstena

$$I = mr^2$$

3. homogeni valjak (ploča, disk) mase *m* i polumjera *r* s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

4. šuplji valjak mase *m*, unutrašnjeg polumjera r_1 i vanjskog polumjera r_2 , s obzirom na uzdužnu os kroz centar mase

$$I = m\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}$$

5. kugla mase *m* i polumjera *r* s obzirom na os kroz centar mase

$$I = \frac{2mr^2}{5}$$

6. homogeni štap mase *m* i duljine *l* s obzirom na os koja je okomita na štap i prolazi kroz centar mase štapa

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

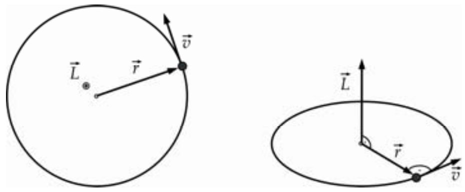
Steinerov poučak glasi

$$I = I_{CM} + md^2$$

a u njemu je I_{CM} moment tromosti tijela mase *m* s obzirom na os kroz centar mase, *I* moment tromosti tijela s obzirom na os paralelnu s osi kroz centar mase i od nje udaljenu za *d*.
Moment količine gibanja materijalne točke mase *m* koja rotira obodnom brzinom $\vec{v}$ oko neke osi je

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

gdje je $\vec{r}$ radijus vektor položaja materijalne točke s obzirom na os.



Moment količine gibanja krutog tijela koje rotira kutnom brzinom $\vec{\omega}$ oko nepomične osi koja je ujedno i os simetrije je

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

gdje je *I* moment tromosti tijela s obzirom na os rotacije.

Osnovna jednadžba rotacije krutog tijela glasi:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdje su $\vec{M}$ i $\vec{L}$ momenti s obzirom na nepomičnu os oko koje tijelo rotira.
Iz gornja dva izraza slijedi

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$$

Ako je I = konst., tada je

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

gdje je $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ kutna akceleracija.

Zakon održanja momenta količine gibanja: u zatvorenom je sistemu ukupan moment količine gibanja očuvan.

Ako je $\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$

Rad pri rotaciji je

$$W = \int_0^{\vartheta} M d\varphi$$

a ako je M = konst., tada je

$$W = M\varphi$$

Snaga pri rotaciji krutog tijela jednaka je

$$P = M\omega$$

gdje je M moment sile, a ω trenutna kutna brzina rotacije.
Kinetička energija krutog tijela koje rotira kutnom brzinom ω oko osi za koju je moment tromosti I iznosi

$$E_{k,r} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

INERCIJALNE SILE

U neinercijalnom sustavu S' koji se giba ubrzano akceleracijom $\vec{a}_0$ prema referentnom sustavu S jednadžba gibanja glasi

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$$

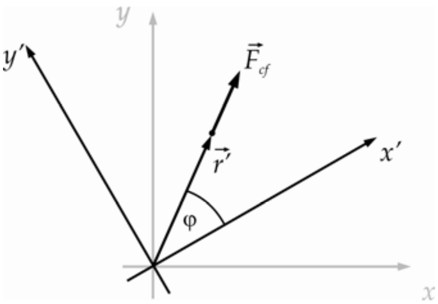
gdje je $\vec{F}$ vanjska sila, a $\vec{F}_{in}$ inercijalna sila.

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$$

U slučaju kada sistem S' rotira kutnom brzinom ω u odnosu na referentni sustav S, na materijalnu točku mase m djeluje inercijalna centrifugalna sila

$$\vec{F}_{cf} = m\omega^2\vec{r}\,'$$

gdje je $\vec{r}\,'$ vektor od ishodišta sustava S' do materijalne točke.



Ako se tijelo giba brzinom $\vec{v}\,'$ s obzirom na rotirajući sistem, na njega, uz centrifugalnu silu djeluje i Coriolisova sila

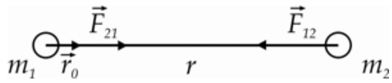
$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}$$

GRAVITACIJA

Između dvije materijalne točke masa m_1 i m_2 djeluje privlačna gravitacijska sila

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0 = -\vec{F}_{21}$$

gdje je G univerzalna gravitacijska konstanta
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, $\vec{r}_0$ jedinični vektor od tijela mase m_1 prema tijelu mase m_2.



Osim za materijalne točke ovaj izraz vrijedi i za kuglaste mase čija je gustoća konstantna. Sila $\vec{F}_{12}$ je sila kojom masa m_1 privlači masu m_2, a $\vec{F}_{21}$ je sila kojom masa m_2 privlači masu m_1.
Ako je jedna masa Zemlja tada izraz za silu

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_z m}{r^2}\vec{r}_0$$

Podijelimo li ovaj izraz s masom m dobivamo jakost gravitacijskog polja, i na malim visinama ona predstavlja akceleraciju sile teže.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G\frac{M_z}{r^2}\vec{r}_0$$

Rad vanjske sile $\vec{F} = -\vec{F}_g$ potreban da se masa m_2 pomakne s udaljenosti r_1 od mase m_1 na udaljenost r_2 je

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = -Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Ako uzmemo da je $r_1 = \infty$ (potencijalna energija u beskonačnosti je 0) i $r_2 = r$ dobivamo gravitacijsku potencijalnu energiju dviju masa m_1 i m_2 čija je međusobna udaljenost r

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Na isti način dobivamo da je za mase na maloj visini od površine Zemlje gravitacijska potencijalna energija

$$E_p = mgh$$

MEHANIKA FLUIDA

Tlak je omjer sile i površine na koju ta sila djeluje okomito

$$p = \frac{F}{S}$$

Ukoliko sila nije jednaka u svim točkama površine možemo definirati tlak u određenoj točki

$$p = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$

Tlak u fluidu izazvan vanjskom silom (tzv. vanjski ili hidraulički tlak) širi se u fluidu jednako na sve strane (Pascaleov zakon).
Na dubini h ispod površine tekućine tlak je.

$$p = p_a + \rho g h$$

gdje je p_a - atmosferski tlak, a $\rho g h$ - hidrostatski tlak koji je uzrokovan težinom tekućine.
Atmosferski se tlak mijenja s nadmorskom visinom i opada po barometarskoj formuli koja za izotermnu atmosferu glasi

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}$$

gdje su p_0 i ρ_0 tlak i gustoća zraka na visini h = 0.

Obično se uzima p_0 = 101325 Pa, ρ_0 = 1,225 kg/m^3 i T_0 = 288 K (15°C).
Arhimedov zakon kaže da je uzgon na tijelo uronjeno u fluid

$$F_u = \rho_f g V$$

gdje je ρ_f gustoća fluida, V volumen uronjenog tijela, a g akceleracija sile teže.

Za stacionarno strujanje idealnog nestlačivog fluida vrijede dvije jednadžbe:
Jednadžba kontinuiteta

$$q = Sv = \text{konst.}$$

i Bernoullijeva jednadžba

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{konst.}$$

gdje je ρ gustoća fluida, q protok, S presjek cijevi, v brzina i p tlak fluida u promatranoj točki, a h visina te točke s obzirom na referentni nivo.

TOPLINA

Temperatura T je mjera za srednju kinetičku energiju toplinskog gibanja molekula: što je kinetička energija toplinskog gibanja molekula veća, to je i temperatura veća.
Veza između termodinamičke temperature T izražene u kelvinima i temperature t izražene u Celzijevim stupnjevima je

$$\frac{T}{\text{K}} = 273{,}15 + \frac{t}{°\text{C}}$$

Čvrsta se tijela zagrijavanjem rastežu, a hlađenjem stežu.
Štap kojem možemo zanemariti debljinu širi se zagrijavanjem po zakonu

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$$

Koeficijent linearnog rastezanja (širenja) α definira se izrazom

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0 \Delta T} = \frac{1}{l_0}\frac{\Delta l}{\Delta T}$$

gdje je l_0 duljina tijela (štapa) pri 0 °C, l duljina na temperaturi t.
Volumno rastezanje čvrstih tijela računa se pomoću relacije

$$V = V_0(1 + 3\alpha \Delta T)$$

gdje je V_0 volumen tijela pri 0 °C, V volumen tijela na temperaturi t.
Toplinsko širenje tekućina računa se pomoću relacije

$$V = V_0(1 + \gamma \Delta T)$$

gdje je V_0 volumen tekućine pri 0 °C, V volumen tekućine na temperaturi t, a γ koeficijent toplinskog širenja

$$\gamma = \frac{V - V_0}{V_0 \Delta T} = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta T}$$

Kad su krajevi nekog štapa ili šipke učvršćeni tako da se ne može mijenjati njihova dužina, a pritom su izloženi zagrijavanju temperature dolazi do mehaničkih naprezanja koja mogu štap deformirati ili slomiti.

To naprezanje je

$$\sigma = \frac{F_t}{S} = E\frac{\Delta l}{l} = E\alpha \Delta T$$

gdje je F_t - sila termalnog naprezanja, a E - Youngov modul elastičnosti.
Stanje plina je funkcija tlaka, volumena i temperature. Njihova međuovisnost je definirana s tri plinska zakona.
Pri izotermnom procesu (T = konst.) vrijedi Boyle-Mariotteov zakon

$$pV = \text{konst.}$$

Pri izobarnom procesu (p = konst.) vrijedi Gay-Lussacov zakon

$$\frac{V}{T} = \text{konst.}$$

Relacija za toplinsko širenje plina je

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

gdje je V volumen plina na temperaturi t, V_0 volumen plina pri 0 °C i $\alpha = \frac{1}{273}\text{K}^{-1}$ toplinski koeficijent širenja plina.
Pri izohornom (V = konst.) procesu vrijedi Charlesov zakon

$$\frac{p}{T} = \text{konst.}$$

Relacija za promjenu tlaka plina pri promjeni temperature je

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

u kojoj je p tlak plina pri temperature t, p_0 tlak pri 0 °C, a $\beta = \frac{1}{273}\text{K}^{-1}$ toplinski koeficijent promjene tlaka plina.
Jednadžba stanja idealnog plina je

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

u kojoj je m masa, n količina tvari M molna masa plina, a R = 8,314 J/(Kmol)
plinska konstanta.

Zbroj srednje kinetičke i potencijalne energije molekula nekog tijela naziva se unutrašnjom energijom U.
Unutrašnja se energija sustava može promijeniti na dva načina: prijenosom topline i vanjskim radom.
Pri zagrijavanju i hlađenju primljena, odnosno predana količina topline je

$$Q = cm\Delta T$$

gdje je c specifični toplinski kapacitet, m masa tijela, a $\Delta T = T_2 - T_1$ promjena temperature.
Specifični toplinski kapacitet c predstavlja količinu topline potrebnu da se nekoj tvari mase 1 kg promijeni temperatura za 1 K. Zagrijavanjem pri stalnom volumenu sva se dovedena količina topline utroši za povećanje unutrašnje energije

$$Q = \Delta U = mc_V \Delta T; \quad V = \text{konst.}$$

gdje je $c_V = \frac{1}{m}\frac{\Delta U}{\Delta T}$ specifični toplinski kapacitet pri stalnom volumenu. Dovođenjem topline pri stalnom tlaku tijelo se i grije i obavlja rad.

$$Q > dU$$

Specifični toplinski kapacitet c_p tada se definira izrazom

$$c_p = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}; \quad p = \text{konst.}$$

Oba specifična toplinska kapaciteta (c_V i c_p) praktično su jednaka za tekućine i čvrsta tijela, a znatno se razlikuju za plinove.

Možemo definirati i molarni toplinski koeficijent

$$C = Mc = \frac{1}{n}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Pri taljenju (očvršćivanju) temperatura tališta ostaje nepromijenjena sve dok se sva tvar ne rastali.

Količina topline taljenja je

$$Q = mL_t$$

gdje je m masa tijela, a L_t, specifična (latentna) toplina taljenja. Jednaku količinu topline predaje tekućina pri očvršćivanju.

Slično je i količina topline isparivanja, odnosno kondenzacije

$$Q = mL_i$$

gdje je L_i, specifična (latentna) toplina isparivanja tekućine.

Fourierov zakon za vođenje (kondukciju) topline glasi

$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} St$$

gdje je Q količina topline koja u vremenu t prođe sredstvom, λ koeficijent toplinske vodljivosti materijala, $\Delta T = T_2 - T_1$ razlika temperature između dvaju slojeva materijala međusobno udaljenih za Δx, a S presjek vodiča.

Taj se zakon može napisati i pomoću toplinskog toka

$$\Phi = \frac{Q}{t}$$

i gustoće toplinskog toka

$$q = \frac{\Phi}{S}$$

Prijenos topline konvekcijom računa se pomoću Newtonova zakona hlađenja

$$q = h_c(T_p - T_f)$$

gdje je T_p temperatura čvrste plohe uz koju struji fluid, T_f temperatura fluida dalje od granične plohe, a h_c koeficijent konvekcije.

Stefan-Boltzmannov zakon

$$\Phi_e = \varepsilon\sigma S T^4$$

daje toplinski tok koji emitira površina tijela zagrijana na temperaturu T.

gdje je σ Stefan-Boltzmannova konstanta σ = 5,67·10^{-8} Wm^{-2}K^{-1}, a ε faktor emisije tijela definiran omjer emitiranog toka tijela i toka crnog tijela iste površine pri istoj temperaturi.

Ako je imamo dvije ravne, paralelne plohe čija je površina mnogo veća od njihova međusobnog razmaka toplinski tok će biti

$$\Phi_e = \varepsilon\sigma S(T_1^4 - T_2^4)$$

gdje je T_1 temperatura plohe s koje imamo zračenje, a T_2 temperatura plohe koja prima toplinu.

Toplinski tok prenesen zračenjem pojednostavljeno se može računati uz pomoć izraza

$$q = h_r(T_1 - T_2)$$

gdje h_r koeficijent prijenosa topline zračenjem od jedne plohe temperature T_1 prema drugoj temperature T_2.

TERMODINAMIKA

Prvi zakon termodinamike glasi:

$$Q = \Delta U + W$$

U infinitezimalnom obliku glasi

$$đQ = dU - đW$$

gdje su dU promjena unutrašnje energije, $đQ$ dovedena (odvedena) toplina i $đW$ obavljeni rad.

Pri izohornom (V = konst.) procesu ne vrši se nikakav rad.

dV = 0 te je i $đW$ = 0.

$$đQ = dU$$

Pri izobarnom (p = konst.) izvršeni je rad

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$$

Kod izotermnog (T = konst.) procesa nema promjene unutarnje energije, tako je $đQ = đW$, a izvršeni rad je

$$W = \int_1^2 p dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Pošto za izotermni proces vrijedi Boyle-Mariotteov zakon pV = konst. izraz za rad možemo pisati i ovako

$$W = nRT \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Pri adijabatskom procesu $đQ$ = 0 pa je $đW$ = - $đQ$.

Specifični toplinski kapaciteti pri stalnom volumenu i stalnom tlaku nisu isti

$$c_V = \frac{1}{m}\frac{dU}{dT}; \quad V = \text{konst.}$$

$$c_p = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}; \quad p = \text{konst.}$$

Omjer c_p i c_V predstavlja adijabatski koeficijent χ.

$$\chi = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V}$$

Razlika molarnih toplinskih kapaciteta pri konstantnom tlaku i pri konstantnom volumenu je univerzalna plinska konstanta R.

$$C_p - C_V = R$$

Veza tlaka, volumena i temperature kod adijabatskog procesa definirana je Poissonovim jednadžbama:

$$TV^{\chi-1} = \text{konst.}$$

$$pV^{\chi} = \text{konst.}$$

$$T^{\chi} p^{1-\chi} = \text{konst.}$$

Izvršeni rad kod adijabatskog procesa je

$$W = \int_1^2 p dV = nR\int_1^2 T \frac{dV}{V} = \frac{nR}{1-\chi}(T_2 - T_1)$$

Stupanj korisnosti kružnog procesa je

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

gdje je Q_1 dovedena, a Q_2 odvedena količina topline.

ELEKTROMAGNETSKO MEĐUDJELOVANJE

Električni naboj jedno je od osnovnih svojstava elementarnih čestica.
Najmanja količina električnog naboja, elementarni naboj, iznosi $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C.
Naboj električki nabijenog tijela može biti samo pozitivan ili negativan mnogokratnik elementarnog naboja

$$q = \pm Ne$$

gdje je N prirodan broj.
Coulombov zakon opisuje električnu silu između dvaju točkastih naboja q_1 i q_2, koji su međusobno udaljeni za r

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0 = -\vec{F}_{21}$$

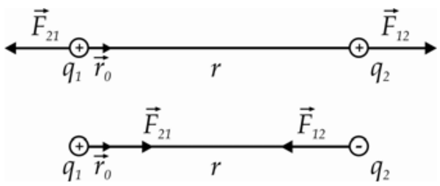
gdje je $\vec{r}_0$ jedinični vektor na spojnici naboja usmjeren u ovom slučaju prema naboju 2, a ε električna permitivnost (dielektričnost) dielektrika u kojem se nalaze naboji. U vakuumu je

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$$

a u dielektriku je

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

gdje je ε_r relativna električna permitivnost sredstva.



Sila $\vec{F}_{12}$ je sila koja djeluje na naboj q_2, a dolazi od međudjelovanja s nabojem q_1, a sila $\vec{F}_{21}$ je sila koja djeluje na naboj q_1, a dolazi od međudjelovanja s nabojem q_2. Ukoliko imamo više naboja rezultantna sila na neki od naboja jednaka je zbroju svih međudjelovanja tog naboja s ostalim nabojima

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i1}$$

Jakost električnog polja u nekoj točki prostora je

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}$$

gdje je $\vec{F}$ električna sila koja djeluje na naboj q' kad se on nalazi u toj točki.
Jakost električnog polja točkastog naboja q na udaljenosti r od naboja je

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$$

Za homogeno električno polje jakost polja je

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d} = \frac{U}{d}$$

gdje je d razmak ekvipotencijalnih ploha kojih su potencijali φ_A i φ_B.

Električno polje je aditivna veličina. Dakle, ima li više naboja koji uzrokuju polje, rezultantno polje dobije se vektorskim zbrojem polja pojedinih naboja.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

Uzajamna potencijalna energija dvaju točkastih naboja q_1 i q_2 na udaljenosti r je

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

Za veći broj nabijenih čestica potencijalna energija je zbroj potencijalnih energija svih parova čestica, pri čemu valja imati na umu da se potencijalna energija svakoga pojedinog para računa samo jedanput.
Potencijal točkastog naboja q na udaljenosti r od naboja je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Rad električne sile pri pomicanju dvaju naboja q_1 i q_2 s udaljenost r_1 na udaljenost r_2 jednak je negativnoj razlici potencijalnih energija:

$$W_{12} = -\Delta E = E_{p1} - E_{p2}$$

Električni kapacitet vodiča s nabojem q i na potencijalu φ jednak je

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

dok je kapacitet kondenzatora

$$C = \frac{q}{U}$$

Pritom je q naboj na jednoj od ploča, a $U = \varphi_1 - \varphi_2$ razlika potencijala medu pločama kondenzatora.
Kapacitet pločastog kondenzatora je

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

gdje je S površina ploča, d razmak medu pločama, a ε_r relativna električna permitivnost dielektrika kojim je ispunjen prostor između ploča.
Niz od n paralelno spojenih kondenzatora možemo zamijeniti kondenzatorom kapaciteta

$$C = \sum_{i=1}^{n}C_i$$

dok za serijski spoj vrijedi

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

Energija uskladištena u nabijenom kondenzatoru kapaciteta C s nabojem q i naponom U jest

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}$$

Električna struja je usmjereni tok nosilaca naboja s jednog mjesta na drugo kroz određeni presjek vodiča. Nosioci naboja u metalima jesu slobodni elektroni, u tekućinama i plinovima to su pozitivni i negativni ioni.
Jakost električne struje definira se izrazom

$$I = \lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

gdje je Δq količina naboja koji prođe presjekom vodiča u vremenu Δt.
U metalnim vodičima jakost struje proporcionalna je naponu.
To izražava Ohmov zakon

$$I = \frac{U}{R}$$

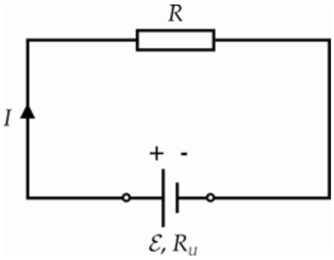
Otpor vodiča u obliku žice duljine l, presjeka S, izrađenoga od materijala otpornosti ρ je

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Ohmov zakon za zatvoreni strujni krug u kojemu se nalazi izvor elektromotorne sile $\mathcal{E}$ i unutarnjeg otpora R_u te vanjski otpor R je

$$I = \mathcal{E}/(R+R_u)$$

gdje je I jakost struje u tom krugu.



Napon među stezaljkama izvora priključenoga u krugu struje smanji se zbog pada napona na unutarnjem otporu izvora i iznosi

$$U = \mathcal{E} - IR_u$$

Za složenije strujne krugove vrijede dva Kirchhoffova pravila. Prvo Kirchhoffovo pravilo kaže: Algebarski zbroj jakosti struja u nekom čvorištu jednak je nuli

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Pritom struje koje ulaze u čvorište računamo pozitivnima, a koje izlaze negativnima.
Drugo Kirchhoffovo pravilo kaže da je u svakoj zatvorenoj petlji zbroj svih elektromotornih sila jednak zbroju svih padova napona na otporima

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i$$

Ukupni (ekvivalentni) otpor serijski spojenih vodiča jednak je

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

a za paralelni spoj vodiča vrijedi

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Rad električne struje za vrijeme t u dijelu strujnoga kruga određen je izrazom

$$W = UIt$$

gdje je U napon medu krajevima promatranoga dijela kruga struje, a I jakost struje.
Snaga električne struje je

$$P = UI$$

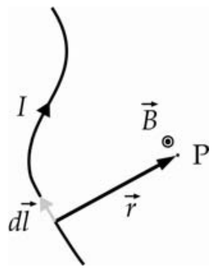
Rad i snaga utrošeni na omskom otporu R su

$$W = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t \quad P = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

Biot-savartov zakon glasi: Doprinos magnetskoj indukciji koji dolazi od elementa vodiča $d\vec{l}$ kojim prolazi struja I jednak je

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

gdje je $\vec{r}$ radijus-vektor od elementa vodiča do točke u kojoj računamo $d\vec{B}$, $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$ jedinični vektor, I jakost struje, $d\vec{l}$ vektor čiji je iznos jednak duljini elementa vodiča dl, a smjer mu je u smjeru struje, i μ permeabilnost sredstva u kojemu se vodič nalazi.



Magnetska indukcija na udaljenosti a od ravnog vodiča kojim teče struja jakosti I je

$$B = \frac{\mu I}{2\pi a}$$

Struja jakosti I koja teče kružnim zavojem polumjera R, uzrokuje u središtu zavoja magnetsku indukciju

$$B = \frac{\mu I}{2R}$$

Magnetska indukcija unutar zavojnice jest

$$B = \mu \frac{NI}{l}$$

gdje je N broj zavoja, l dužina zavojnice i I jakost struje kroz zavojnicu.
Sila $\vec{F}$ na naboj q, koji se giba brzinom $\vec{v}$ u magnetskom polju indukcije $\vec{B}$, je

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$
$$F = qvB \sin\alpha$$

gdje je α kut između smjera gibanja $(\vec{v})$ i smjera vektora $\vec{B}$. Jedinica za magnetsku indukciju je tesla (T).
Na element vodiča $d\vec{l}$ kojim teče struja jakosti I magnetsko polje indukcije $\vec{B}$ djeluje silom

$$d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}$$

Ako je polje homogeno, tada je sila na ravni vodič dužine l

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$
$$F = BIl \sin\alpha$$

gdje je α kut između smjera kojim teče struja kroz vodič i smjera vektora $\vec{B}$.

Sila kojom dva ravna paralelna vodiča djeluju jedan na drugi je

$$F = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l$$

gdje su I_1 i I_2 jakosti struja u vodičima, r njihova međusobna udaljenost, l dužina vodiča, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ TmA^{-1} apsolutna permeabilnost vakuuma, a μ_r relativna permeabilnost sredstva. Ako su struje istoga smjera, sila je privlačna, u suprotnom je odbojna.
Faradayev zakon indukcije: inducirana elektromotorna sila u zavoju jednaka je brzini promjene magnetskog toka kroz zavoj

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Giba li se vodič dužine l brzinom v u homogenome magnetskom polju indukcije B, inducirana elektromotorna sila je

$$\mathcal{E}_i = Blv \sin\alpha$$

gdje je α kut između $\vec{v}$ i $\vec{B}$.

HARMONIJSKO TITRANJE

Harmonijsko titranje nastaje pod utjecajem elastične sile

$$F = -kx$$

gdje je k konstanta oscilatora, a x pomak od položaja ravnoteže.

$$k = \omega^2 m$$

gdje je ω kružna frekvencija oscilatora, m masa tijela.
Ako u jednadžbu gibanja uvrstimo za silu elastičnu silu dobivamo ovu jednadžbu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

tj.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Rješenje ove jednadžbe je sinusnog ili kosinusnog oblika

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

gdje je x udaljenost od položaja ravnoteže u trenutku t, A amplituda, φ_0 početni fazni pomak i ω kružna frekvencija.
Deriviranjem ovog izraza dobivamo izraz za brzinu tijela koje harmonijski titra

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Deriviranjem izraza za brzinu dobivamo izraz za ubrzanje tijela koje harmonijski titra

$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

Period harmonijskog titranja je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Potencijalna energija tijela koje harmonijski titra

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Kinetička energija tijela koje harmonijski titra

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Zbroj kinetičke i potencijalne energije pri harmonijskom titranju je konstantan

$$E_u = E_p + E_k = \text{konst.}$$

Matematičko njihalo se sastoji od niti zanemarive mase na kojoj je obješeno tijelo koje se može aproksimirati materijalnom točkom. Ako je kut otklona mali period titranja matematičkog njihala je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdje je l duljina niti, a g gravitacijska akceleracija.

VALOVI

Val predstavlja širenje poremećaja kroz neko sredstvo u prostoru.
Imamo dvije vrste valova: longitudinalne i transverzalne.
Longitudinalni val je val kod kojeg čestice titraju u smjeru prostiranja vala.
Brzina prostiranja longitudinalnog vala u čvrstom sredstvu je

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

gdje je ρ gustoća sredstva kroz koji se prostire val, a E Youngov modul elastičnosti.

$$E = \frac{\Delta F/S}{\Delta l/l} = \frac{l}{S}\frac{\Delta F}{\Delta l}$$

gdje je $\Delta F/S$ promjena naprezanja, a $\Delta l/l$ linearna deformacija.
Transverzalni val je val kod kojeg čestice titraju okomito na smjer prostiranja vala.
Uzmimo val na žici kao primjer transverzalnog vala.
Brzina prostiranja transverzalnog vala je

$$c = \sqrt{\frac{F_z}{\mu}}$$

gdje je F_z sila zatezanja žice, a μ masa po jedinici duljine žice.
Intenzitet zvuka je određen relacijom

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 c$$

ili

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho c}$$

gdje je ρ srednja gustoća plina, A amplituda titranja čestica, ω kružna frekvencija titranja, Δp_0 amplituda promjene tlaka u sredstvu kojim se širi zvuk.
Nivo jačine zvuka određuje se relacijom

$$L = 10\log\frac{I}{I_0}$$

gdje I intenzitet zvuka čiji se nivo određuje, I_0 referentni intenzitet koji iznosi 10^{-12} W/m^2.
Ukoliko se izvor vala i prijemnik relativno gibaju dolazi do promjene frekvencije koju registrira prijemnik u odnosu na frekvenciju koju šalje izvor. Tu pojavu nazivamo Dopplerov efekt.

Ako se izvor vala kreće brzinom v, a prijemnik brzinom v_1, te ako se oni međusobno približavaju prijemnik će registrirati ovu frekvenciju

$$\nu' = \nu \frac{c+v_1}{c-v}; \quad (\nu' > \nu)$$

Ako izvor vala i prijemnik međusobno udaljavaju prijemnik će registrirati ovu frekvenciju

$$\nu' = \nu \frac{c-v_1}{c+v}; \quad (\nu' < \nu)$$

Ako val prelazi iz jednog sredstva u drugo dolazi do njegovog prelamanja koje izražavamo zakonom prelamanja

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

gdje su c_1 i c_2 brzine vala kroz prvo i drugo sredstvo, α i β upadni kut i kut loma.

Uvodeći indeks loma n, koji predstavlja odnos brzine vala u vakuumu i određenom sredstvu

$$n = \frac{c_0}{c}$$

možemo zakon prelamanja pisati u obliku

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Ukoliko imamo više koherentnih izvora valova dolazi do interferencije valova.

Razlika optičkih putova dva vala za vakuum je

$$\delta = \Delta = r_1 - r_2$$

Razlika optičkih putova dva vala za neko sredstvo indeksa loma n je

$$\delta = n\Delta = n(r_1 - r_2)$$

Interferencija dva vala bit će konstruktivna pod uvjetom

$$\delta = k\lambda$$

Interferencija dva vala bit će destruktivna pod uvjetom

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

gdje je $k = 0,1,2,\ldots$, a λ valna duljina.

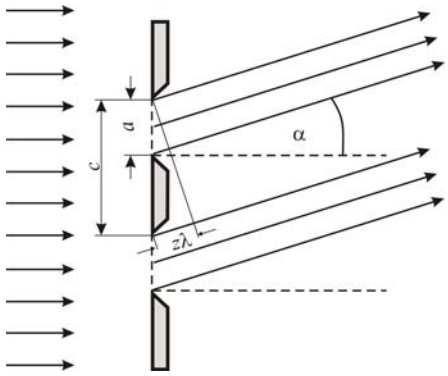
Uvjet za formiranje k-tog maksimuma na prepreci udaljenoj za D od malog otvora veličine d je

$$d\sin\alpha = k\lambda$$

Optička rešetka je niz od N pravilno razmaknutih pukotina. Uvjet za formiranje k-tog difrakcijskog maksimuma je

$$c\sin\alpha = k\lambda$$

gdje je c konstanta optičke rešetke, $k = 0,1,2,\ldots$



Ako na tanku ploču padnu svjetlosne zrake, tada se oni djelomično odbijaju na graničnim površinama, a djelomično prolaze kroz njih. Na ovaj način se omogućava formiranje koherentnih zraka koje imaju uvjet za interferenciju. Razlika optičkih putova zraka koje se odbijaju od gornje površine i zraka koje se odbijaju od donje površine dana je izrazom

$$\delta = 2nd\cos\beta$$